ATÉ AQUI TRABALHÁMOS ESSENCIALMENTE C/ TENSÕES E CORRENTES QUE NÃO VARIAM NO TEMPO (DC)

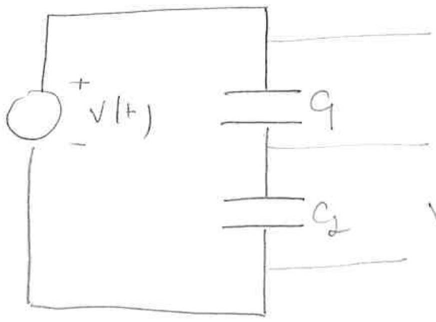
VAMOS COMEÇAR A TRABALHAR C/ TENSÕES E CORRENTES QUE VARIAM NO TEMPO, OU SEJA, A PARTIR DE AGORA, EM GERAL:

$$\begin{cases} v = v(t) \\ i = i(t) \end{cases}$$

ASSOCIAÇÃO DE CONDENSADORES

É PERFEITAMENTE EQUIVALENTE AO QUE FIZEMOS C/ AS RESISTÊNCIAS:

LEI DAS MALHAS



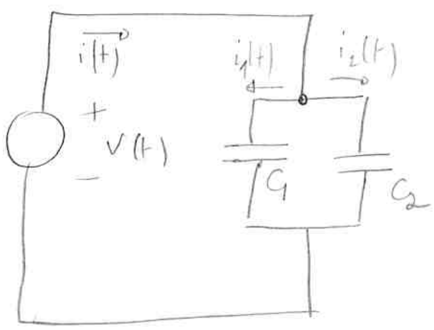
$$V_1(t) = \frac{1}{C_1}\int i(t)\,dt$$

$$V_2(t) = \frac{1}{C_2}\int i(t)\,dt$$

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int i(t)\,dt$$

OU SEJA: $\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$ (ASSOCIAÇÃO EM SÉRIE)

LEI DOS NÓS



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$\int i(t)\,dt = \int i_1(t)\,dt + \int i_2(t)\,dt$$

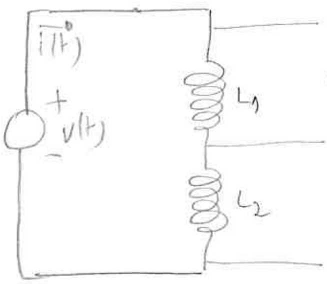
$$C\,V(t) = C_1\,V(t) + C_2\,V(t)$$

$$C\,V(t) = (C_1 + C_2)\,V(t)$$

$\boxed{C = C_1 + C_2}$ (ASSOCIAÇÃO EM PARALELO)

ASSOCIAÇÃO DE INDUTORES

LEI DAS MALHAS



$$v_1(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt}$$

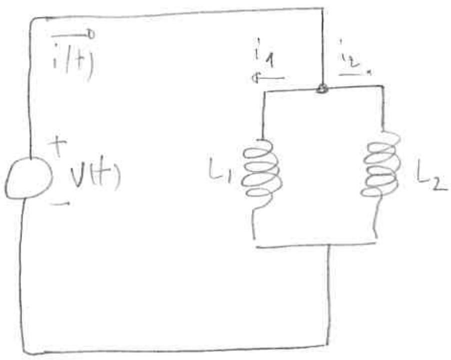
$$v_2(t) = L_2 \frac{di(t)}{dt}$$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = (L_1 + L_2) \frac{di(t)}{dt}$$

OU SEJA:

$$\boxed{L = L_1 + L_2}$$ SÉRIE

LEI DOS NÓS



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$\frac{1}{L} V(t) = \frac{1}{L_1} V(t) + \frac{1}{L_2} V(t)$$

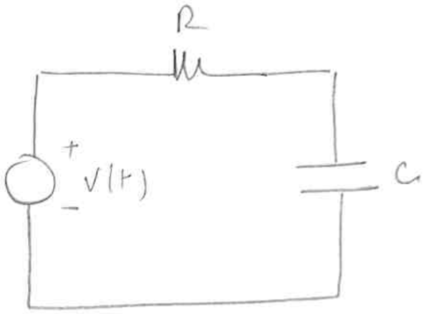
$$\frac{1}{L} V(t) = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) V(t)$$

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

AGORA VAMOS COMEÇAR A ASSOCIAR COMPONENTES DIFERENTES

COMECEMOS PELO MAIS SIMPLES: MALHA RC



LEI DAS MALHAS:

$$+v(t) - v_R(t) - v_C(t) = 0 \Rightarrow v(t) = v_R(t) + v_C(t)$$

UTILIZANDO AS DEFINIÇÕES DE COMPONENTES IDEAIS:

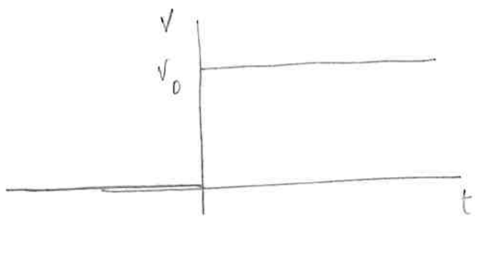
$$v(t) = R\, i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\, dt$$

DERIVANDO EM ORDEM A t

$$\frac{dv(t)}{dt} = R\,\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\, i(t)$$

ESTA EQUAÇÃO DIFERENCIAL É TUDO O QUE EU SEI DIZER ENQUANTO NÃO ESPECIFICAR $v(t)$

COMECEMOS ENTÃO POR SUPOR QUE $V(t)$ REPRESENTA UMA FUNÇÃO DE HEAVISIDE:



$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ V_0 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

ESTAMOS INTERESSADOS EM SABER O QUE SE PASSA PARA $t>0$

NESSE DOMÍNIO SERÁ: $\frac{dv(t)}{dt} = 0$

OU SEJA:

$$R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} i(t)}$$

ESTA EQUAÇÃO DIF. APARECE POR TODO O LADO NA FÍSICA.

DERIVADA DA FUNÇÃO É PROPORCIONAL À PRÓPRIA FUNÇÃO

QUAL É A FUNÇÃO?

LEMBREM-SE QUE $\left(e^{ax}\right)' = a\, e^{ax}$

OU SEJA: $i(t) = K\, e^{\left(-\frac{1}{RC}\right)t}$

$$\left(i(t)\right)' = K\left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{1}{RC} \underbrace{K e^{-\frac{t}{RC}}}_{i(t)} = -\frac{1}{RC} i(t)$$

CONVENCIDOS?

COMO ENCONTRO A CONSTANTE DE INTEGRAÇÃO K?

PELA CONDIÇÃO INICIAL
(COMO SEMPRE!)

$$i(t=0) = K \underbrace{e^{\left(-\frac{0}{RC}\right)}}_{=1} = K \Rightarrow \boxed{i(t) = i_0\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

PORTANTO K É O VALOR DA CORRENTE NO INSTANTE INICIAL (NO INSTANTE EM QUE APARECE V_0 AOS TERMINAIS DA MALHA!)

O QUE É QUE EU POSSO DIZER SOBRE i_0?

$$\boxed{\text{QUANTO VALE } V_C(0)\text{?}}$$

POR DEFINIÇÃO:

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)\,dt \quad (\text{pq } V(t)=0 \ t<0)$$

E PORTANTO:

$$V_C(t=0) = \frac{1}{C}\int_{0}^{0} i(t)\,dt = 0$$

ISTO SIGNIFICA QUE, COMO JÁ SABEM UM CONDENSADOR NÃO SE CARREGA INSTANTANEAMENTE (PORQUÊ?) E PORTANTO $V(t=0)$ APARECE INTEIRINHA AOS TERMINAIS DE R!

OU SEJA:

$$i(t=0) = \frac{V_0}{R}$$

DONDE:

$$\boxed{i(t) = \frac{V_0}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

PORTANTO:

$$\boxed{V_R(t) = R\, i(t) = V_0\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\,dt$$

$$V_C(t) = \frac{V_0}{RC}\left[-RC\, e^{-\frac{t}{RC}}\right]_0^t$$

$$V_C(t) = -V_0\left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1\right)$$

$$\boxed{V_C(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

COMO NÃO PODIA DEIXAR DE SER:

$$V_C(t) + V_R(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + V_0\, e^{-t/RC} = V_0 \;!$$

AGORA VAMOS PARAR UM BOCADINHO PARA PENSAR!

1ª CONCLUSÃO IMPORTANTE

RC TEM DIMENSÕES DE UM TEMPO

$[R] \equiv m^2\,Kg\,s^{-1}\,C^{-2}$ $\qquad [RC] \equiv s$!

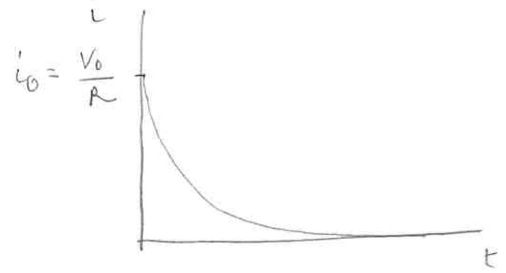
$[C] \equiv m^{-2}\,Kg^{-1}\,s^2\,C^2$

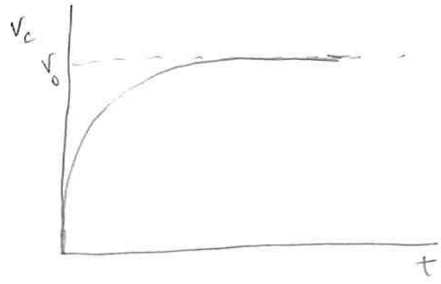
RC CHAMA-SE TEMPO DE RELAXAÇÃO DO CIRCUITO

$\downarrow$

DONDE VEM ESTE NOME?

PARA PERCEBER ISSO VAMOS TRAÇAR CURVAS $V_c(t)$ E $V_R(t)$ (OU $i(t)$)





2ª CONCLUSÃO IMPORTANTE

ESTAS CURVAS SÃO UNIVERSAIS (i.e. VÁLIDAS PARA QUALQUER VALOR DE R e C) SE EU EXPRIMIR O TEMPO EM UNIDADES RC

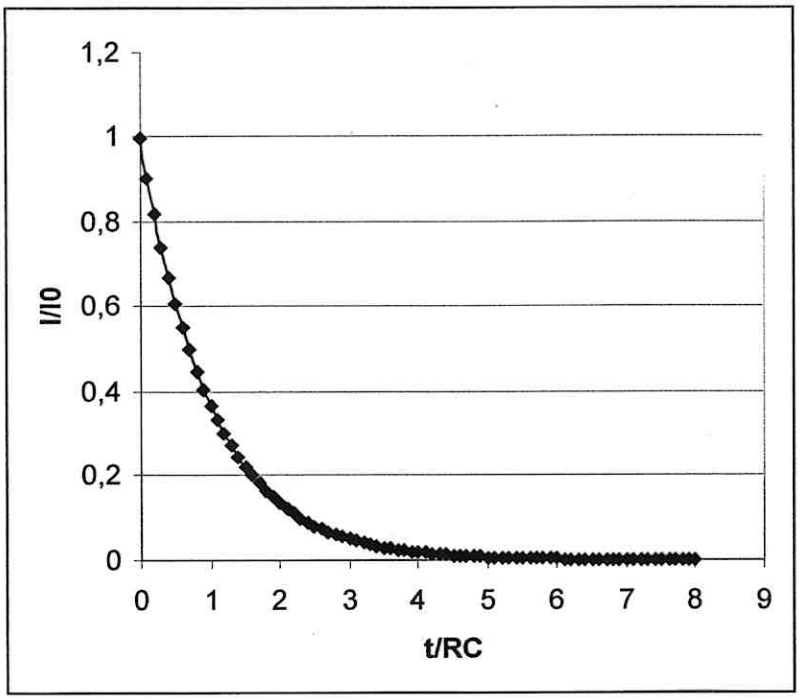
$$\frac{i(t)}{i_0} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{V_c(t)}{V_0} = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

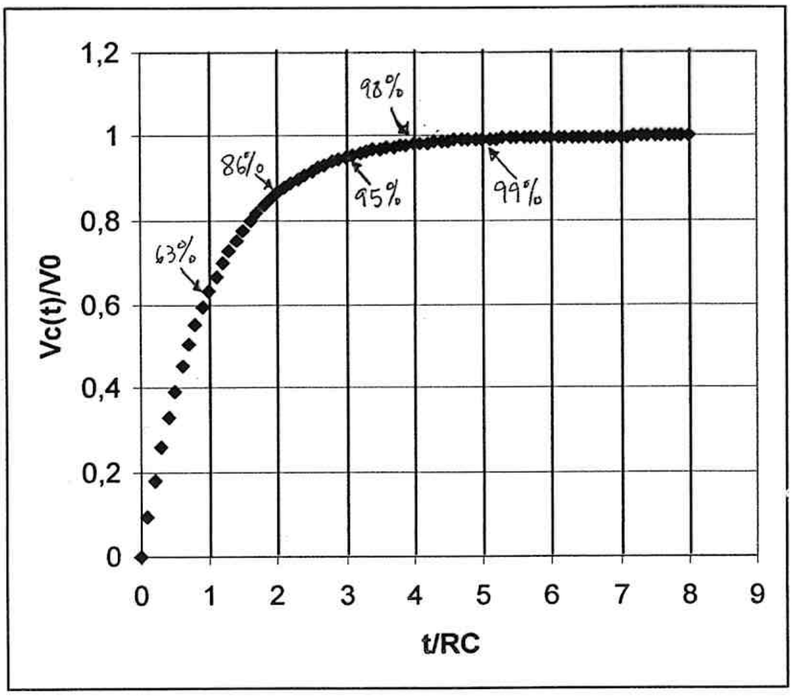
(VER GRÁFICO FOLHA SEGUINTE)

$RC \equiv \tau$ CHAMA-SE TEMPO DE RELAXAÇÃO PORQUE É UMA MEDIDA DO TEMPO AO FIM DO QUAL O CIRCUITO "RELAXA"!

τ É O TEMPO AO FIM DO QUAL ΔI (OU ΔV) É IGUAL A 63% DO TOTAL

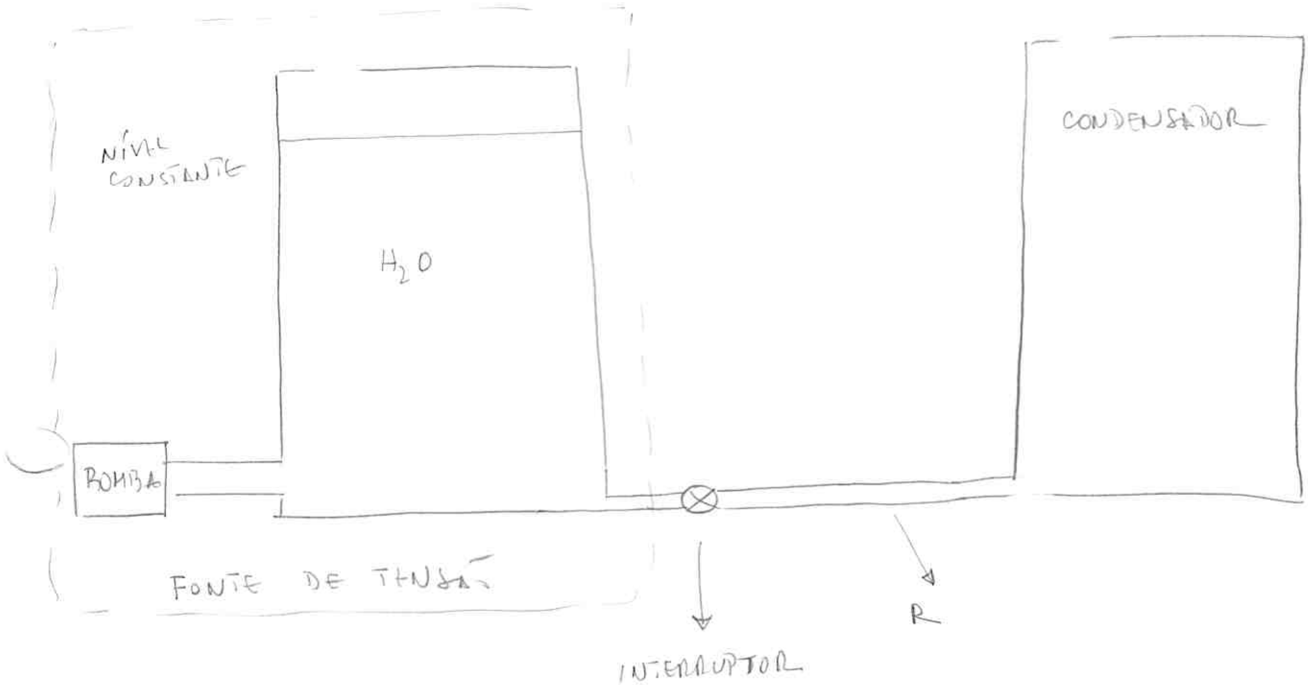


1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
I/I0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
t/RC



1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Vc(t)/V0
63%
86%
95%
98%
99%
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
t/RC

FAÇAMOS UMA ANALOGIA HIDRÁULICA



1.º MÁXIMO FLUXO — QUANDO LIGO (DEPOIS VAI SENDO CADA VEZ MENOR!)

FAZ SENTIDO EU PERGUNTAR QUANTO TEMPO LEVO A ENCHER UM DEPÓSITO DE 30 ℓ ?

NÃO!

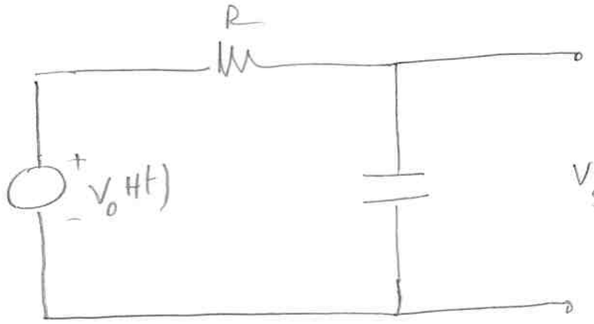
PORQUE ISSO DEPENDE DO DIÂMETRO DO TUBO QUE EU USAR!

O QUE FAZ SENTIDO É PERGUNTAR:

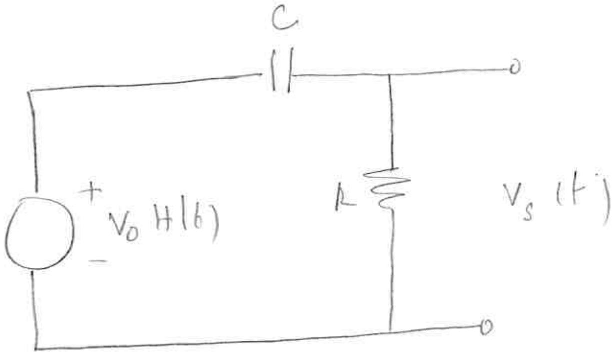
COM ESTE TUBO (R) QUANTO TEMPO DEMORO A COLOCAR x LITROS NO DEPÓSITO (C)

ENCONTRÁMOS AS EQUAÇÕES GERAIS PARA $V_C(t)$ E $V_R(t)$ QUANDO $V(t) = V_0 H(t)$

AGORA POSSO APLICAR AOS DOIS CASOS POSSÍVEIS



$$V_s(t) = V_c(t) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



$$V_s(t) = V_R(t) = R\, i(t) = R\, i_0\, e^{-\frac{t}{RC}} = \cancel{R}\frac{V_0}{\cancel{R}} e^{-\frac{t}{RC}}$$

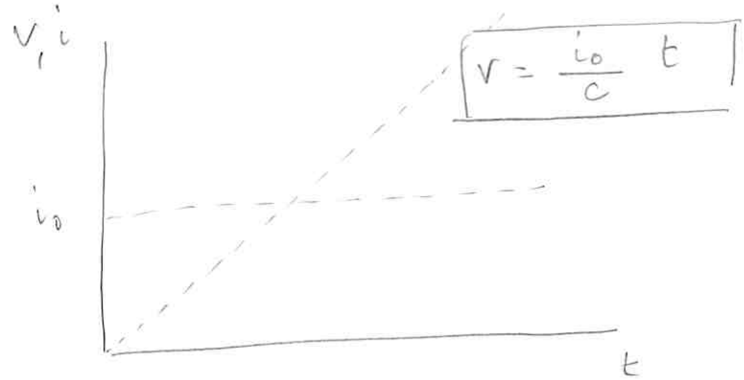
$$\boxed{V_s(t) = V_0\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

ESTUDO DA RESPOSTA TEMPORAL DE CIRCUITOS RC E CR (FAZ-SE SEMPRE USANDO A FUNÇÃO DE HEAVISIDE)

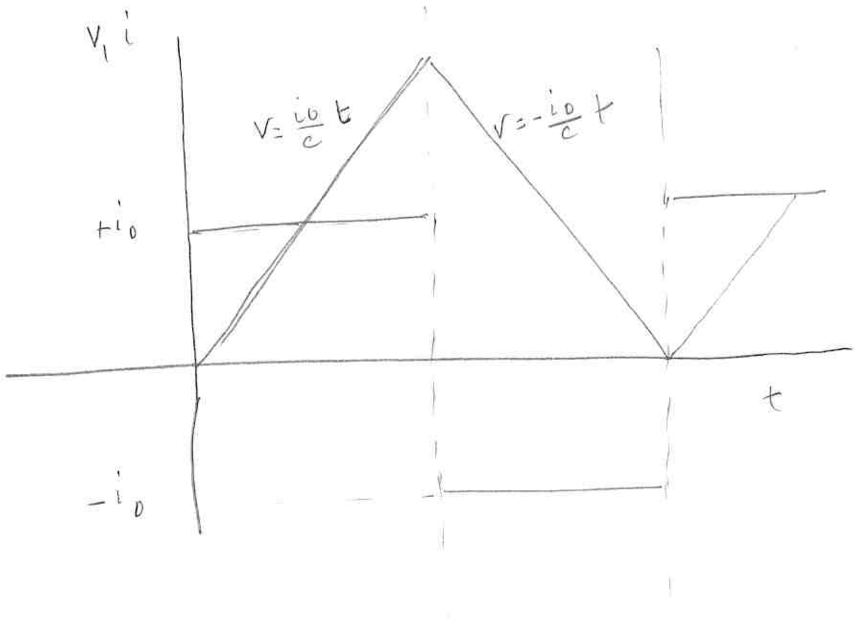
VAMOS AGORA FAZER O EXERCÍCIO DE PENSAR UM POUCO NA FORMA DE $v_c(t)$ PARA DIFERENTES FORMAS DE $i(t)$, OU SEJA, PERCEBER O QUE ACONTECE À TENSÃO NUM CONDENSADOR PARA DIFERENTES TIPOS DE CORRENTE

i) $i(t) = i_0 = c^{te}$

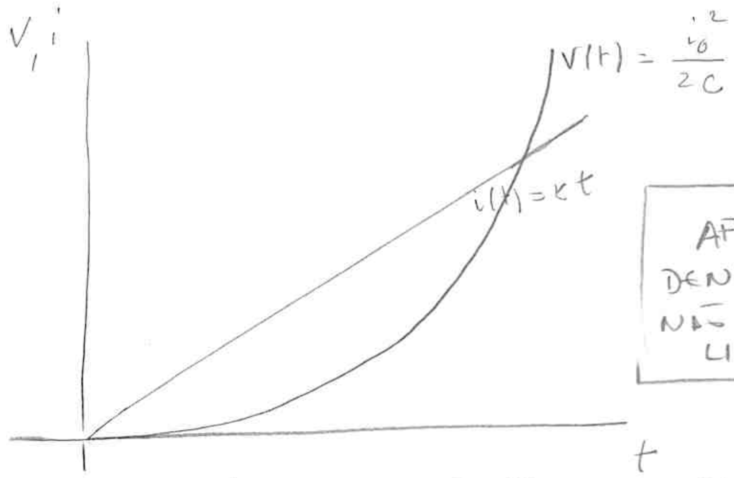
$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_0 \, dt = \frac{i_0 t}{C} \quad \left(V(t=0) = 0 \right)$$



ii)



iii) $i(t) = k\,t$

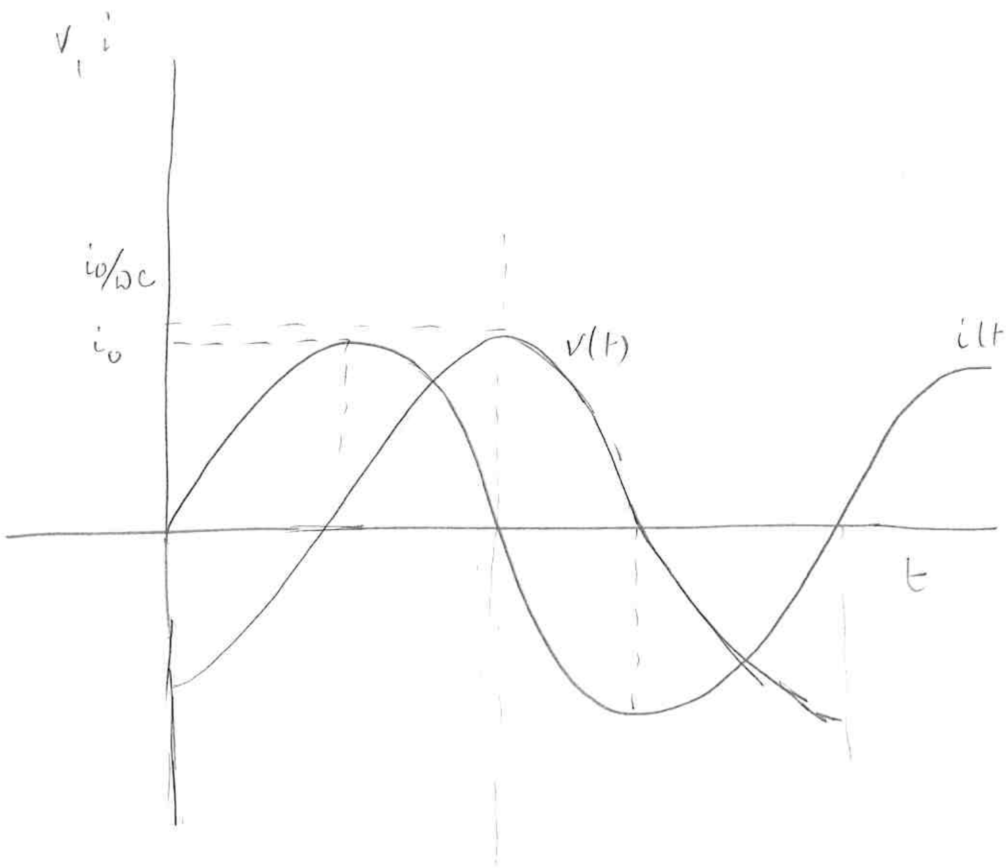


AFINAL O CONDENSADOR É OU NÃO UM COMPONENTE LINEAR?!

VEJAMOS O QUE ACONTECE NO CASO PARTICULAR EM QUE $\boxed{i(t) = i_0 \operatorname{sen} \omega t}$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt = \frac{1}{C}\int_0^t i_0 \operatorname{sen}(\omega t) = -\frac{i_0}{\omega C}\cos(\omega t)$$

$$\boxed{v(t) = -\frac{i_0}{\omega C}\cos(\omega t)}$$



CONCLUSÃO: NO CASO PARTICULAR EM QUE $i(t) = i_0 \operatorname{sen}(wt)$, PELO FACTO DE $\int \operatorname{sen} = -\cos$, TUDO SE PASSA COMO SE A CORRENTE E A TENSÃO TIVESSEM A MESMA FORMA, A MENOS DE UMA FASE. PORQUE:

$$-\cos(wt) = \operatorname{sen}(wt - \pi/2)$$

MAIS:

QUANDO A CORRENTE TEM UM VALOR DE PICO i_0, A TENSÃO TEM UM VALOR DE PICO i_0/wC

ISSO LEVA-NOS A DEFINIR A REACTÂNCIA DE UM CONDENSADOR:

$$X_C = \frac{1}{wC} = \frac{V_{pico}}{i_{pico}}$$

OU SEJA:

$$V_{pico} = X_C \, i_{pico}$$

"RECUPERAMOS" ASSIM DE ALGUMA FORMA A LINEARIDADE.

MAS ATENÇÃO: ISTO SÓ É VÁLIDO PARA SINAIS SINUSOIDAIS

DOIS PONTOS SOBRE OS QUAIS VALE A PENA PENSAR:

- É RAZOÁVEL QUE A CORRENTE ESTEJA ADIANTADA RELATIVAMENTE À TENSÃO?
- É RAZOÁVEL QUE $V_{pico} \rightarrow 0$ QUANDO $\omega \rightarrow \infty$?

PARA COMPLETAR ESTE TEMA: O QUE ACONTECE NO CASO DE UM INDUTOR?

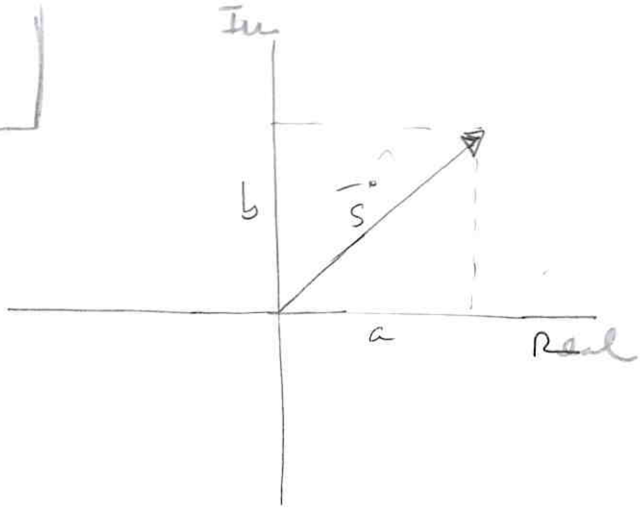
INDUTOR IDEAL: $V(t) = L \dfrac{di(t)}{dt}$

SE FIZEREM O MESMO RACIOCÍNIO QUE FIZEMOS PARA O CONDENSADOR PODEM FACILMENTE CONCLUIR QUE:

- NUM INDUTOR É A TENSÃO QUE ESTÁ ADIANTADA FACE À CORRENTE. PORQUÊ?
- A REACTÂNCIA DO INDUTOR É $X_L = \omega L$

Como só tenho uma diferença de fase, posso resolver esta "incomodidade" e generalizar a lei de Ohm se passar a representar as correntes e as tensões por vectores num espaço bidimensional: o espaço dos números complexos:

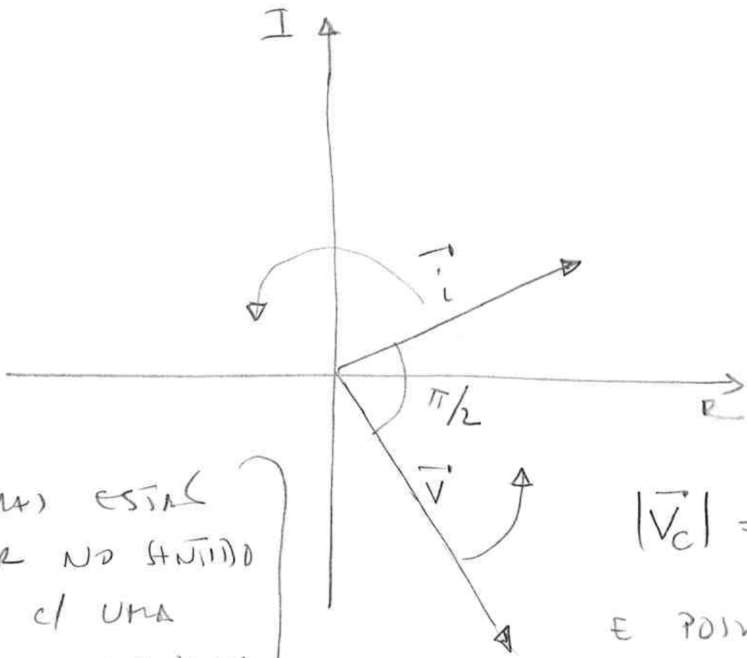
DIAGRAMA DE ARGAND



$$\vec{s} = a + j b$$

$$(j^2 = -1)$$

A corrente e a tensão no condensador passam a ser as <u>componentes imaginárias</u> de vectores girantes:



Vectores estão a girar no sentido directo c/ uma frequência angular ω

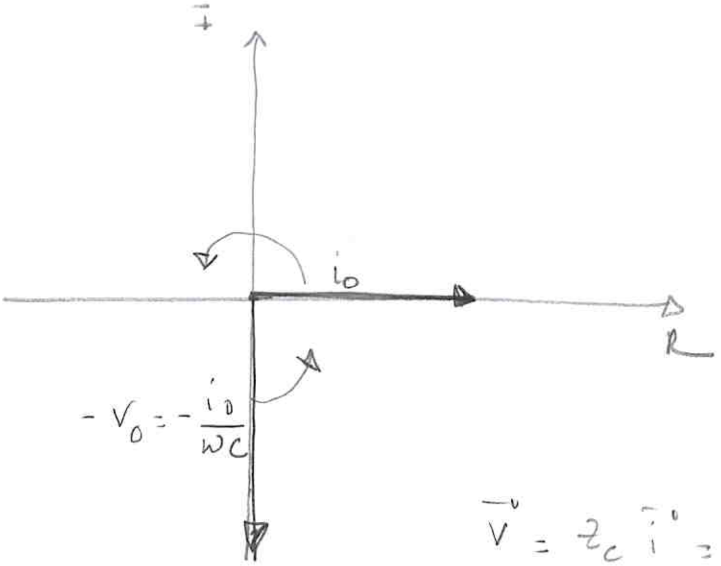
$$|\vec{V_c}| = X_c \, |\vec{i_c}|$$

E posso mesmo escrever:

$$\vec{V_c} = Z_c \, \vec{i_c}$$

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C} = -\left(\frac{1}{\omega C}\right) j$$

VEJAMOS O QUE ISTO DÁ C/ UM CASO MUITO SIMPLES: O INSTANTE EM QUE A CORRENTE SE ENCONTRA NO SEU VALOR $i(t)=0$:



$$\vec{V} = Z_C \vec{i} = \frac{1}{jwC}\vec{i} = -j\frac{\vec{i}}{wC}$$

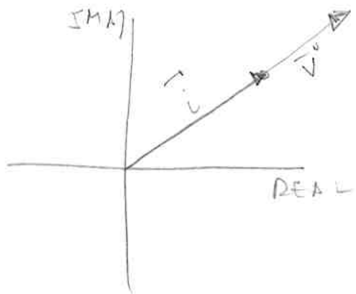
COMO NESTE INSTANTE O VECTOR $\vec{i}$ SÓ TEM COMPONENTE REAL, NO MESMO INSTANTE O VECTOR $\vec{V}$ ESTÁ SOBRE O EIXO IMAGINÁRIO, DIRIGIDO SEGUNDO O SENTIDO NEGATIVO.

ENTÃO E NESTE NOVO TIPO DE REPRESENTAÇÃO, COMO É QUE EU ESCREVO AS LEIS DE OHM PARA OS OUTROS DOIS COMPONENTES?

OU SEJA:

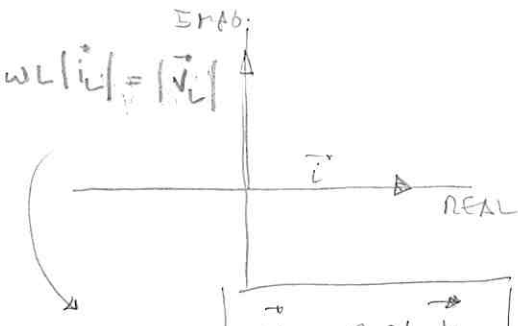
$$\begin{cases} Z_C = \frac{1}{j\omega C} \\ Z_R = ? \\ Z_L = ? \end{cases}$$

<u>RESISTÊNCIA</u>: V e i ESTÃO SEMPRE EM FASE (POR DEFINIÇÃO) PORTANTO $Z_R \equiv R$



$$\boxed{\vec{V} = R\,\vec{i}}$$

<u>INDUTOR</u>: NO INDUTOR, FEITAS AS CONTAS, É V QUE ESTÁ $\pi/2$ ADIANTADO EM RELAÇÃO A i, E A REACTÂNCIA É ωL



OU SEJA $\boxed{\vec{V} = j\omega L\,\vec{i}}$